宇宙定数の力学

福山武志: 立命館大学理工学部
森川雅博: 京都大学理学部

現在の宇宙項 (Λ) の上限は、観測から $\Lambda \le 10^{-120} m_{planck}^2$ と抑えられている。この小さな値は説明されるべきである、というのが宇宙項問題である。実際、様々な物質場によってこれより何十桁も大きな真空のエネルギーが自然に生じ、effective な宇宙項に寄与する。[1] 最近、Coleman は、重力の instanton[2] を用いた議論によって、宇宙の波動関数[3] が宇宙項 0 に鋭いピークを持つことを示している。[4] しかし、これだけでは宇宙膨張に伴う様々な相転移による真空のエネルギーの時間変化と相いれない。実際、彼による Euclid 形式での計算では実際の時間との関連がつけられない。従って、特に宇宙の inflation などが存在できなくなる。現在の小さな Λ と、真空のエネルギーによるインフレーションを両立させるためにはどうしても宇宙項の時間発展を考えざるを得ない。以下この問題を考えていく。

宇宙項の時間発展を考察するとき、そこには少なくとも 2 つの時間スケールが存在している。つまり宇宙項の変化の時間スケール τ_Λ と宇宙膨張のそれ τ_g である。もし $\tau_\Lambda \gg \tau_g$ である時期があったならば (例えば deSitter 膨張しているとき)、そこでの Λ の力学は重力の量子揺らぎから導かれる有効ポテンシャルによって支配されると考えられる。もしこの有効ポテンシャルがちょうど $\Lambda = 0$ に最小を持つなら、宇宙定数 Λ ははじめに有限の値を持っていても、ゆっくり 0 に向かって減少すると考えられる。このように動力学的に $\Lambda = 0$ が導かれるとすれば、宇宙膨張の途中で相転移にともない真空のエネルギーが急に現れても、それをも含めた effective な宇宙項の消滅を言うことが出来る。

Coleman による Euclid 形式の議論に於いては、時間スケールの階層が全く考えられていない。それは、通常の場の理論がそれを取り込むように作られていないからである。更にまた Coleman の議論によれば、$\Lambda = 0$ は"自然な"パラメターの選び方であって、そのパラメターがなぜそう選ばれたのか? という機構については言及しない。ただし、Euclid 形式の議論で、エネルギースケールの階層性を取り入れて議論している例はある。[5]

我々は Λ (及び G) が物質場 ϕ を通して力学変数だとするモデルを考える。従って $\tau_\Lambda \approx \tau_\phi$ となる。物質場はいろいろな時間スケールのものが豊富にあるだろう。そのうち時間スケール τ_ϕ が $\tau_\phi \gg \tau_g$ をみたしているものが Λ の時間発展を積極的に与える。これ以外の時間ス

ケールを持ったものは、宇宙項の時間発展に消極的で、単に定数部分に寄与するだけである。以下 Λ の時間発展を積極的に与える場を考察する。我々は次のような作用を考える：

$$S = S_g - \int d^4x\sqrt{-g}\left[V(\phi) + \frac{1}{2}\xi R\phi^2\right] + \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\cdot\partial_\nu\phi. \tag{1}$$

ここで S_g は重力の作用で ξ はスカラー曲率との結合定数である。我々の時間スケールの設定により、この作用のうちはじめの２項 $(\equiv S_g(\phi))$ が残りの kinetic term をはるかに凌ぐ。ここで $S_g(\phi)$ は次のような（ $\tau_\phi \gg \tau_g$ において）近似的な定数をふくむ：

$$\Lambda = \frac{G}{G_0}\Lambda_0 + 8\pi GV(\phi), \qquad G^{-1} = G_0^{-1} - 8\pi\xi\phi^2. \tag{2}$$

ϕ 場に対する有効作用を作るために早い変数である重力場の量子揺らぎをまず積分する事を考える：

$$\exp(iS_{eff}(\phi)) \equiv \int \mathcal{D}g\exp(iS). \tag{3}$$

２つの時間スケール τ_ϕ と τ_g とをはっきり区別するために時間座標を、$\tau_\phi \gg 2T_i$ なる $2T_i$ 毎に区切って i 番目の区間が $[t_i - T_i,\ t_i + T_i]$ $(\ni t = t_i + \tau)$ であたえられるようにする。上の重力の積分は各区間毎に Wick rotation をして、Λ, G がそれぞれの区間で定数だとして Coleman-Hawking と同様の計算をする。[4][6] Λ が負の場合は評価の仕様が無いので、我々はこの場合を考えないことにする。Λ が正の場合は作用を最大にするような時空に対する通常の有効作用により積分が評価される。それは半径 $r = \sqrt{3/\Lambda}$ の S^4 時空となる。この時点で、先ほどの T_i をこの r に取るべき事が判明する。Lerentzian では、この時空は $R \times S^3$ の deSitter 時空に対応する。得られた有効ポテンシャルは Wick rotation を戻してやって、

$$\exp\frac{3\pi i}{G(\phi(t_i))\Lambda(\phi(t_i))} \tag{4}$$

のようになる。初めに小さいとして落としていた kinetic term を $R \times S^3$ の metric を用いて復活してやると、結局有効作用は次のようになる：

$$S_{eff} = \int dt\left[\pi^2\left(\frac{3}{\Lambda}\right)^{3/2}\cosh^3\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{G}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\right], \tag{5}$$

これから ϕ の運動方程式が得られる：

$$\exp\left(\sqrt{3\Lambda t}\right)\dot{\phi} = -\frac{\partial}{\partial\phi}W(\phi), \tag{6}$$

ここで $W(\phi)$ は有効ポテンシャルであり、もし $\xi = 0$ とおけば、

$$W(\phi) = \frac{4\sqrt{3}}{9\pi^2 G(\phi)}\sqrt{\Lambda(\phi)}, \tag{7}$$

で与えられる。これは明らかに$\Lambda = 0$ に最小値を持つ。$\xi \neq 0$ であっても基本的には同じである。従って、Λ はゆっくり変化して最終的に 0 に落ち着いて行くと考えられる。しかし、式 (6) の宇宙膨張による摩擦項のために、初期条件によっては ϕ は最後までポテンシャルを転がりきらないで途中で止まってしまう場合がある。また、ポテンシャルが $\Lambda \approx 0$ で急なために、初めの仮定 $\tau_\Lambda \gg \tau_g$ が破れる場合もある。しかし、いづれの場合に於いても、しばらくの宇宙膨張によって τ_g が大きくなっているので、Λ の力学は ϕ の次に長い時間スケールをもった物質場に支配されるようになると考えられる。このように、順次長い時間スケールを持った物質場が次々に役割を入れ換えて、宇宙項を 0 に導くと考えられる。実際、τ_Λ が常に τ_g の定数倍という理想的な物質場が常に存在するなら、有限の時間の内に宇宙項が 0 になる事が示せる。

結局上の議論では、重力の量子揺らぎが $\Lambda = 0$ に特異性を与えることが本質的であるが、時間スケールをちゃんと取り込むことによってこれは Λ に対する有効ポテンシャルを作り出すのである。Coleman の議論では、これは統計分布関数だと見なされていたものである。詳しくは論文を参照して下さい。[7] さらにまた、Λ が baby universe 場を通して力学変数だとするモデルを宇宙の第 3 量子化を用いて議論することもできる。[8] この場合には、宇宙膨張とともに Λ が 0 に収束する様子をあらわに見ることができる。

REFERENCES

1. 宇宙項のレヴィウとしては、例えば
   S. Weinberg, *The Cosmological Constant Problem* (Morris Loeb Lectures in Physics, Harvard University, 1988), preprint UTTG-12-88.
2. S. Giggings and A. Strominger, *Axion-induced Topology Change in Quantum Gravity and String Theory* Harvard University preprint HUTP-87 /A067; *Incoherence Loss and the Determination of Fundamental Coupling Constants in Quantum Gravity* HUTP-88/A006.
3. J. B. Hartle and S. W. Hawking, Phys. Rev. **D28**, 2960 (1983).
4. S. Coleman, *Why there is nothing rather than something: a theory of the Cosmological Constant*, preprint HUTP-88/A022 (1988).
5. S. L. Adler, Phys. Rev. Lett. **62** 373 (1989).
6. S. W. Hawking, Phys. Lett. **134B**, 403 (1984).
7. T. Fukuyama and M. Morikawa, *Time Depandence of Coleman-Hawking Mechasnism for the Vanishing Cosmological Constant*, preprint KUNS951 (1988).
8. M. Morikawa, *Dynamics of the Cosmological Constant in the Interacting Quantum Field Theory of Universe*, in preparation.